# PARTITIONING A STATIONARY SET IN $mathcal{P}(\lambda)$ (Axiomatic Set Theory and Set-theoretic Topology)

数理解析研究所講究録
第 1595 巻 2008 年 70-83



# PARTITIONING A STATIONARY SET IN $\mathcal{P}(\lambda)$

名古屋大学大学院情報科学研究科
薄葉 季路 (Toshimichi Usuba)
Graduate School of Information Science
Nagoya University

ABSTRACT. $A$ を空でない集合とする. $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ が $\mathcal{P}(A)$ で **stationary** とは, 任意の $f:[A]^{<\omega} \to A$ に対してある $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $f``x \subseteq x$ となるものが存在することである. この論文では $\mathcal{P}(A)$, 特に $A$ が uncountable cardinal $\lambda$ の場合の $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の stationary set の基本的な分割定理を証明する: $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ が stationary で, ある regular uncountable cardinal $\kappa \leq \lambda$ で $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary であるとする. このとき, $S$ は $\kappa$ 個の互いに素な stationary set に分割可能である.

## 1. 導入

まず, 空でない集合 $A$ に対して, $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set の概念を導入する:

**Definition 1.1.** $A$ を空でない集合とする. $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ が $\mathcal{P}(A)$ で **stationary** とは, 任意の $f:[A]^{<\omega} \to A$ に対して, ある $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $f``[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものが存在することである.

この定義は, ある一点を除いて Woodin による stationary tower forcing の stationary と同じものである (stationary tower forcing については Larson [10] を参照): Woodin による stationary では $\{A\}$ は $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set であるが, 我々の定義ではそうではない. $\{A\}$ は自明な意味で stationary であるが, 集合 $\{A\}$ の構造は非常に単純でありこれ以上分割することができない. よってこの論文では集合 $\{A\}$ は stationary とはしない.

また, $\{A\}$ を stationary と見なさないことにより, $A$ が高々可算ならば $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set は存在しないことがわかる. よって, 我々は以後非可算集合上の stationary set, 特に uncountable cardinal 上の stationary set のみ扱うことにする.

先に定義した stationary の概念は, 次の意味で古典的な stationary の概念の一般化になっている:

**Fact 1.2.** *(1) regular uncountable cardinal $\kappa$ と $S \subseteq \kappa$ に対して, $S$ が (古典的な意味で) $\kappa$ で stationary $\iff$ $S$ が (我々の意味で) $\mathcal{P}(\kappa)$ で stationary.*

*(2) regular uncountable cardinal $\kappa$, ordinal $\gamma \geq \kappa$ に対して, $\mathcal{P}_\kappa\gamma = \{x \subseteq \gamma : |x| < \kappa\}$ とする. このとき $S \subseteq \mathcal{P}_\kappa\gamma$ に対して, $S$ が (Jech [8] の意味で) $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ で stationary $\iff$ $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が $\mathcal{P}(\gamma)$ で stationary.*

さて, 次は古典的な stationary set に対してよく知られている定理である.

**Fact 1.3.** *$\kappa$ を regular uncountable cardinal, $\gamma \geq \kappa$ とする.*

*(1)* (Solovay [12]) *$\kappa$ 上の任意の stationary set は, $\kappa$ 個の互いに素な stationary set に分割可能である.*

*(2)* (Gitik [7]) $\mathcal{P}_\kappa\gamma$ 上の任意の *stationary set* は, $\kappa$ 個の *stationary set* に分割可能である.

これより, 次のような自然な疑問が生じる: $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set $S$ に対して, $S$ は何個の stationary set に分割可能であるか?

Burke はこの疑問に対して次のような部分的な回答を得た:

**Fact 1.4** (Burke [2]). $A$ を *uncountable set* とする. このとき $\mathcal{P}(A)$ 上の *stationary set* は二つの互いに素な *stationary set* に分割可能である. よって特に可算個に分割可能である.

この論文では, 我々は非可算基数 $\lambda$ に対する $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の stationary set の分割に関して, 基本となる次の定理を証明する.

**Definition 1.5.** $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set $S$ と cardinal $\mu$ に対して, $\mathrm{Part}(S,\mu)$ を次のような主張とする: $S$ は $\mu$ 個の互いに素な stationary set に分割可能である.

**Theorem 1.6.** $\lambda$ を *uncountable cardinal* とし, $S$ を $\mathcal{P}(\lambda)$ の *stationary set* とする. $\kappa \leq \lambda$ を *regular uncountable cardinal* とし, $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が *stationary* であるとする. このとき, $\mathrm{Part}(S,\kappa)$ が成立する.

$\mathcal{P}(\lambda)$ 上の stationary set $S$ に対して, regular uncountable cardinal $\kappa \leq \lambda$ で $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary となるものは常に存在することに注意.

## 2. 定義, 用語

一般的な定義, 用語は Kanamori [9] に従う. また, generic ultrapower と $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set の基本性質については Larson [10] を参照せよ.

この論文を通して, $\lambda$ は常に uncountable cardinal, $\kappa$ は regular uncountable cardinal を表すものとする. また, $\mathcal{P}(A)$ 上の stationary set を扱うときは常に $A$ は非可算集合であると仮定する. また, stationary set $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して, $\mathcal{P}(A)$ が文脈から明らかなときは "$\mathcal{P}(A)$ で" 等の言葉を省略し単に "$S$ は stationary" と書く.

Reg を regular cardinal 全体からなる class とする.

非可算集合 $A$ と $C \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対して, $C$ が $\mathcal{P}(A)$ の **club** とはある function $f : [A]^{<\omega} \to A$ で $C = \{x \subsetneq A : f``[x]^{<\omega} \subseteq x\}$ となることである. この club は **strong club** と呼ばれることもある.

次は $H_\theta$ の elementary submodel に関する基本的事実である.

**Fact 2.1.** $\theta$ を *regular uncountable cardinal,* $M \prec \langle H_\theta, \in\rangle$ とする.

*(1)* *ordinal* $\alpha \in M$ で $M \cap \alpha \in \alpha$ となるならば, $\alpha$ は *regular uncountable cardinal* であり, $\forall x \in M\,(|x| < \alpha \Rightarrow x \subseteq M)$ が成立する.

*(2)* 順序数 $\beta \in M$ に対し, $\mathrm{ot}(M \cap \beta^+) \leq \mathrm{ot}(M \cap \beta)^+$.

*(3)* 非可算集合 $A \in M$ と $\mathcal{P}(A)$ の *club* $C \in M$ に対し, $M \cap A \neq A$ ならば $M \cap A \in C$ である.

ある固定された well-order が入っている可算言語の構造 $\mathcal{M} = \langle B, \in, \ldots\rangle$ と $x \subseteq B$ に対して, $SK^{\mathcal{M}}(x)$ を $x$ の $\mathcal{M}$ による Skolem Hull とする.

この論文では, ideal は常に無限集合上の non-principal proper ideal とする. $A$ 上の ideal $I$ に対して, $I^*$ を $I$ の dual filter, $I^+ = \mathcal{P}(A) \setminus I$ とする. $I^+$ の元は **$I$-positive set** とも呼

ばれる. $X \in I^+$ に対し, $I|X$ を集合 $\{Y \in I : Y \cap X \in I\}$ とする. $I|X$ は $I \cup \{A \setminus X\}$ によって生成される ideal となる.

ideal $I$ に対して, $\mathbb{P}_I = \langle I^+, \subseteq_I \rangle$ を標準的な generic ultrapower poset とする. ここで $\subseteq_I$ は $X \subseteq_I Y \iff X \setminus Y \in I$ で定義されている.

## 3. STATIONARY SET の基本性質

この節では stationary set に関する基本的な性質を調べる. この節で扱うほとんどの性質は簡単であるか通常の stationary set に関する類推から得られるものであるので, 証明は頻繁に省略する.

**Lemma 3.1.** *$S$ を $\mathcal{P}(A)$ の stationary set とする. このとき $\bigcup S = A$.*

**Lemma 3.2.** *集合 $A$ と $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ に対し, 次は同値である:*

*(1) $S$ は $\mathcal{P}(A)$ で stationary.*

*(2) 任意の function $f : [A]^{<\omega} \to [A]^{<\omega}$ に対して $x \in S$ で $x \neq A$ かつ $\bigcup f``[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものが存在する.*

*(3) $\theta$ を regular cardinal で $A \in H_\theta$ なる物とし, $R \subseteq H_\theta$ とすると, $M \prec \langle H_\theta, \in, R \rangle$ で $M \cap A \neq A$ かつ $M \cap A \in S$ となるものが存在する.*

**Lemma 3.3.** *$S_0$, $S_1$ を $\mathcal{P}(A)$ 上の non-stationary set とする. このとき $S_0 \cup S_1$ も non-stationary である.*

**Lemma 3.4.** *$A \subseteq B$ を集合とする.*

*(1) 任意の $\mathcal{P}(A)$ の stationary set $S$ に対して, $\{y \subseteq B : y \cap A \in S\}$ は $\mathcal{P}(B)$ で stationary である.*

*(2) $\mathcal{P}(B)$ の stationary set $T$ に対して, もし $\forall y \in T\,(y \cap A \neq A)$ となるならば $\{y \cap A : y \in T\}$ は $\mathcal{P}(A)$ で stationary である.*

**Lemma 3.5** (Fodor's lemma). *$S \subseteq \mathcal{P}(A)$ を stationary set とする. この時任意の function $f : S \to A$ で $\forall x \in S\,(f(x) \in x)$ なるものに対して, $a \in A$ で $\{x \in S : f(x) = a\}$ が stationary となるものが存在する.*

**Lemma 3.6.** *$\lambda$ を singular cardinal とする. この時, 集合 $\lambda = \{\alpha : \alpha < \lambda\} \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ は non-stationary である.*

*Proof.* そうでないとする. $\theta$ を大きな uncountable cardinal とする. Lemma 3.2 より, $M \prec \langle H_\theta, \in \rangle$ で $\lambda \in M$ かつ $M \cap \lambda < \lambda$ となるものが存在する. このとき Fact 2.1 より $\lambda$ は regular でなくてはならないが, これは矛盾である. □

**Lemma 3.7.** *$S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ を staionary set とする. このとき regular uncoutable cardinal $\kappa \leq \lambda$ で $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary となるものが存在する.*

*Proof.* 大きい regular cardinal $\theta$ を固定する. Lemma 3.2 より, $S' = \{x \in S : \exists M_x \prec \langle H_\theta, \in, \lambda \rangle\,(M_x \cap \lambda = x)\}$ は stationary である. 各 $x \in S'$ に対して, $\kappa_x \in M_x$ で $M_x \cap \kappa_x \in \kappa_x$ となるものを選ぶ. このとき $\kappa_x \leq \lambda$ かつ, Fact 2.1 より, $\kappa_x$ は regular uncountable cardinal である.

もし $\{x \in S' : \kappa_x = \lambda\}$ が stationary ならば, $\lambda$ が求める regular cardinal である. もし $S'' = \{x \in S' : \kappa_x < \lambda\}$ が stationary ならば, Fodor's lemma より $\kappa < \lambda$ で

$\{x \in S'' : \kappa_x = \kappa\}$ が stationary となるものが取れる．このときこの $\kappa$ が求めるものである． □

**Lemma 3.8.** $\mathcal{P}(\lambda)$ の任意の *stationary set* $S$ に対して，$|S| \geq \lambda$ である．また，$S$ が $\{x \subseteq \lambda : \sup(x) = \lambda\}$ の *statoionary subset* ならば $|S| \geq \lambda^+$ である．

*Proof.* ある cardinal $\mu < \lambda$ で $|S| = \mu < \lambda$ となっているとする．必要なら $S$ を削ることで，任意の stationary set $T \subseteq S$ に対して $|T| = \mu$ となっているとしてよい．

もし $S_0 := \{x \in S : |x| \leq \mu\}$ が stationary ならば，$|\bigcup S_0| \leq \mu < \lambda$．よって $\bigcup S_0 \neq \lambda$ となり，矛盾が生じる．

もし $S_0$ が non-stationary ならば，$S_1 := \{x \in S : |x| > \mu\}$ が stationary となる．$|S_1| = \mu$ かつ 各 $x \in S_1$ に対して $|x| > \mu$ となるので，次のようにして injection $f : S_1 \to \lambda$ で $\forall x \in S_1 (f(x) \in x)$ となるものが構成できるが，これは Fodor's lemma に反する: $\langle x_\xi : \xi < \mu\rangle$ を $S_1$ の enumeration とする．$f$ を $\xi < \mu$ に関する inductuion で定義する．$f|\{x_\eta : \eta < \xi\}$ が定義されたとする．$\xi < \mu < |x_\xi|$ であるので，$f``\{x_\eta : \eta < \xi\} \neq x_\xi$．よって $\alpha \in x_\xi \setminus f``\{x_\eta : \eta < \xi\}$ が選べ，$f(x_\xi) = \alpha$ とすればよい．

次に，$S \subseteq \{x \subseteq \lambda : \sup(x) = \lambda\}$ と仮定する．もし $|S| = \lambda$ ならば，bijection $\pi : S \to \lambda$ を取り $g : S \to \lambda$ を $g(x) = \min(x \setminus \pi(x))$ と定義する．Fodor's lemma を再び使うことにより，$\alpha < \lambda$ で $\{x \in S : g(x) = \alpha\}$ が stationary となる．このとき $\{x \in S : g(x) = \alpha\} \subseteq \{x \in S : \pi(x) \leq \alpha\}$，よって $|\{x \in S : g(x) = \alpha\}| \leq |\alpha| < \lambda$．これは矛盾である． □

ここで，$\mathcal{P}(A)$ 上の normal ideal の概念を導入する．

**Definition 3.9.** $I \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ が **normal ideal over** $\mathcal{P}(A)$ とは次を満たすこととする:

(1) $I$ は proper ideal over $\mathcal{P}(A)$.
(2) 任意の $x \subseteq A$ に対して $\{x\} \in I$.
(3) 任意の $a \in A$ に対して $\{x \subseteq A : a \notin x\} \in I$.
(4) $I$ は diagonal union に関して閉じている: 任意の $\langle X_a : a \in A\rangle \in {}^A I$ に対して，$\nabla_{a \in A} X_a = \{x \subseteq A : \exists a \in x (x \in X_a)\} \in I$.

(4) は次の (4)' と同値であることはすぐにわかる:

(4)' 任意の $X \in I^+$ と任意の関数 $f : X \to A$ で $\forall x \in X (f(x) \in x)$ を満たすものに対して，$a \in A$ で $\{x \in X : f(x) = a\} \in I^+$ となるものが取れる．

**Definition 3.10.** $\mathrm{NS}_{\mathcal{P}(A)}$ を $\mathcal{P}(A)$ 上の non-stationary set 全体とする．

**Lemma 3.11.** *(1)* $\mathrm{NS}_{\mathcal{P}(A)}$ は $\mathcal{P}(A)$ 上の最小の *normal ideal* である．
*(2)* $\mathcal{P}(A)$ 上の任意の *normal ideal* は $\sigma$*-complete* である．

**Lemma 3.12.** $S \subseteq \mathcal{P}(A)$ を *stationary* とする．このとき，任意の可算個の *function* $f_n : [A]^{<\omega} \to A$ $(n < \omega)$ に対して，$x \in S$ で $x \neq A$ かつ $\forall n \in \omega (f_n``[x]^{<\omega} \subseteq x)$ となるものが存在する．

ここで generic ultrapower に関する標準的な性質について議論する．$I$ を $\mathcal{P}(A)$ 上の normal ideal とする．$G$ を $(V, \mathbb{P}_I)$-generic filter とする．このとき，$G$ は $V$-normal ultrafilter である:

(1) 任意の $X \in (\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))^V$ に対して，$X \in G$ か $(\mathcal{P}(A))^V \setminus X \in G$ のどちらか一方が成立する．

(2) 任意の $X \in G$ と任意の $\mathcal{P}(A)$ 上の function $f \in V$ で $\forall x \in X\,(f(x) \in x)$ なるものに対して, ある $a \in A$ で $\{x \in X : f(x) = a\} \in G$ となる.

(1) より, $G$ を用いた $V$ の ultrapower が $V[G]$ で構成可能である. $\mathrm{Ult}(V, G) = \langle V^*, \in^* \rangle$ を $V$ の $G$ による generic ultrapower とする. このとき, generic elementary embedding $j : V \to V^*$ が $j(x) = [c_x]_G$ と定義できる. ここで $c_x$ は 定数 $x$ を取る $\mathcal{P}(A)$ 上の constant function であり, $[f]_G$ は $f$ の equivalence class (modulo $G$) である. このとき, 任意の formula $\varphi$ に対して $\langle V^*, \in^* \rangle \models \varphi([f_0]_G, \ldots, [f_n]_G) \iff \{x \subseteq A : \varphi(f_0(x), \ldots, f_n(x))\} \in G$ holds. が成立する.

$x \in V^*$ に対して, $\mathrm{ext}(x) = \{a \in V^* : V^* \models a \in^* x\}$ とする. 次は $G$ の $V$-normality より得られる:

**Lemma 3.13.** id を $\mathcal{P}(A)$ 上の *identity map* とする. このとき $\mathrm{ext}([\mathrm{id}]_G) = \{[c_a]_G : a \in A\} = j``A$.

$I$ が **precipitous** とは任意の $(V, \mathbb{P}_I)$-generic filter $G$ に対して, $\mathrm{Ult}(V, G)$ が well-founded となることである. もし $\mathrm{Ult}(V, G)$ が well-founded であるときは $\mathrm{Ult}(V, G)$ とそれの transitive collapse $\langle M, \in \rangle$ を同一視することにする. このとき $[\mathrm{id}]_G = j``A$ が成立することに注意.

Foreman [6] による次の **disjointing property** は normal precipitous ideal の解析に有用である:

**Definition 3.14.** $I$ を ideal over $\mathcal{P}(A)$ とする. $I$ が **disjointing property** をもつとは, 任意の $\mathbb{P}_I$ の antichain $\mathcal{A}$ に対して, $\{C_A : A \in \mathcal{A}\} \subseteq I^*$ で $\{A \cap C_A : A \in \mathcal{A}\}$ が互いに素となるものが存在することである.

次の lemma の証明は [6] を参照せよ.

**Lemma 3.15.** *$I$ を normal ideal over $\mathcal{P}(A)$ とする.*

*(1) $I$ が disjointing property をもつならば, $I$ は precipitous かつ任意の $(V, \mathbb{P}_I)$-generic $G$ に対して $\mathrm{Ult}(V, G)$ は $V[G]$ の中で長さ $|A|^V$ の列に関して閉じている.*

*(2) もし $I$ が $|A|^+$-saturated ならば, $I$ は disjointing property をもつ.*

*(3) cardinal $\mu \le |A|$ に対して, $I$ が $\mu$-saturated $\iff$ 互いに素な $\mu$ 個の $I$-positive set は存在しない.*

ここで, 簡便のために次の定義を導入する.

**Definition 3.16.** $I$ を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ とする. regular uncountable cardinal $\kappa \le \lambda$ が **$I$ の critical point** とは $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^+$ となることである. $\mathrm{crit}(I)$ を $I$ の critical point 全体とする.

$\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set $S$ に対し, $\kappa$ が **$S$ の critical point** であるとは $\kappa$ が $\mathrm{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|S$ の critical point であることである. $\mathrm{crit}(S) = \mathrm{crit}(\mathrm{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|S)$ とおく.

$\mathrm{crit}(I)$ は常に空でないことに注意.

**Lemma 3.17.** *normal precipitous ideal $I$ over $\mathcal{P}(\lambda)$ に対し, $\kappa \in \mathrm{crit}(I)$ とし $G$ を $(V, \mathbb{P}_I)$-generic で $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in G$ なるものとする. $j$ を $G$ により生成される generic elementary embedding とする. このとき $j$ の critical point は $\kappa$ である. すなわち, 各 $\alpha < \kappa$ に対しては $j(\alpha) = \alpha$ だが $j(\kappa) > \kappa$ となる.*

**Lemma 3.18.** $I$ を *normal ideal over* $\mathcal{P}(\lambda)$ とし, $\kappa \in \mathrm{crit}(I)$ とする. このとき $I|\{x : x \cap \kappa \in \kappa\}$ は *$\kappa$-complete* である.

*Proof.* $J = I|\{x : x \cap \kappa \in \kappa\}$ とする. $\gamma < \kappa$ と $\langle X_\xi : \xi < \gamma \rangle \in {}^\gamma J$ を任意に取る. $X = \bigcup_{\xi<\gamma} X_\xi$ とし, $X \in J^+$ と仮定してみる. $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in J^*$ であるので, $Y := \{x \in X : \gamma \subseteq x\} \in I^+$ が成立する. ここで $f : Y \to \gamma$ を $f(x)$ が $x \in X_\xi$ となる最小の $\xi < \gamma$ となるよう定義する. $f$ は regressive, よってある $\xi^* < \gamma$ で $\{x \in Y : f(x) = \xi^*\} \in I^+$ となる. このとき $\{x \in Y : f(x) = \xi^*\} \subseteq X_{\xi^*}$, よって $X_{\xi^*} \in I^+$. これは矛盾である. □

**Lemma 3.19.** $S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ を *stationary set* とし, $\kappa \in \mathrm{crit}(S)$ とする. このとき任意の $f : [\lambda]^{<\omega} \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対して $x \in S$ で $x \cap \kappa \in \kappa$ かつ $\bigcup f``[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものが存在する.

*Proof.* 大きい regular cardinal $\theta$ を固定する. $\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ が stationary なので, $M \prec \langle H_\theta, \in \rangle$ で $\lambda, \kappa, f \in M$, $M \cap \lambda \in S$, $M \cap \lambda \neq \lambda$ かつ $M \cap \kappa \in \kappa$ となるものが取れる. ここで $s \in [M \cap \lambda]^{<\omega}$ を取る. このとき $f(s) \in M$ であり, かつ $|f(s)| < \kappa$, $M \cap \kappa \in \kappa$ なので, $f(s) \subseteq M \cap \lambda$ が成立する. よって $\bigcup f``[M \cap \lambda]^{<\omega} \subseteq M \cap \lambda$ となる. □

**Lemma 3.20.** $\lambda$ を *regular cardinal*, $I$ を *normal ideal over* $\mathcal{P}(\lambda)$ とする. ある $\kappa \leq \lambda$ で $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ となっており, かつ $I$ が *$\kappa$-saturated* であるとする. このとき,

*(1)* $\{x \subseteq \lambda : x$ は $\sup(x)$ の *$\sigma$-club*$\} \in I^*$.
*(2)* *(通常の意味での) stationary set* $E \subseteq \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ に対して, $\{x \subseteq \lambda : E \cap \sup(x)$ は $\sup(x)$ で *stationary*$\} \in I^*$.

*Proof.* 任意の $(V, \mathbb{P}_I)$-generic $G$ を取り, $V[G]$ で議論する. $I$ は $\kappa$-saturated かつ $\lambda \geq \kappa$ なので, $I$ は precipitous である. $j : V \to M$ を $G$ より生成される generic elementary embedding とする.

$I$ の $\kappa$-saturation より, $M$ は $V[G]$ で $\lambda$-列に関して閉じている. また, $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in G$ なので $j$ の critical point は $\kappa$ である. 次が成立するが, これは上の $M$ の閉包性及び $\kappa$ が $j$ の critical point であることよりすぐに帰結できる.

(a) 任意の ordinal $\alpha$ に対し, もし $(\mathrm{cf}(\alpha))^{V[G]} = \omega$ ならば $(\mathrm{cf}(\alpha))^M = (\mathrm{cf}(\alpha))^V = \omega$.
(b) 任意の ordinal $\alpha$ で $(\mathrm{cf}(\alpha))^V = \omega$ となるものに対し, $j(\alpha) = \sup(j``\alpha)$ である.

(1). $j``\lambda$ が $\sigma$-closed であることを示せば十分である. これを示すために, $a \subseteq j``\lambda$ で $\mathrm{ot}(a) = \omega$ となるものを取る. $b = j^{-1}``a$ とおく. 明らかに $\mathrm{ot}(b) = \omega$ である. $\alpha = \sup(a)$ かつ $\beta = \sup(b)$ とする. このとき $V[G]$ で $\mathrm{cf}(\beta) = \omega$ となるので, $V$ でもそうなっている. 特に $\beta < \lambda$ である. $j(\beta) = \sup(j``\beta) = \sup(j``b) = \sup(a) = \alpha$, よって $\sup(a) \in j``\lambda$ となる.

(2). stationary set $E \subseteq \{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ を取る. $j(E) \cap \sup(j``\lambda)$ が stationary in $\sup(j``\lambda)$ であることを示せばよい. $\mathbb{P}_I$ は $\kappa$-c.c. を満たすので, $E$ は $V[G]$ でも $\lambda$ の stationary set のままである. $j(E) \cap \sup(j``\lambda)$ が stationary であることを示すため, $\sup(j``\lambda)$ の $\sigma$-club $C$ を任意に取る. $j``\lambda$ は $\sigma$-club なので, $C \subseteq j``\lambda$ と仮定してよい. $D = j^{-1}``C$ とおく. $D$ は $\lambda$ で unbounded である. $E$ が stationary なので, $\alpha \in E$ で $\alpha \in \lim(D)$ となるものが取れる. よって $j(\alpha) \in j(E)$. さらに, $\alpha \in \lim(D)$ かつ $C$ は $\sigma$-club なので, $\sup(j``\alpha) \in C$ かつ $\sup(j``\alpha) = j(\alpha) \in C$ が成立する. よって $j(\alpha) \in j(E) \cap C$ である. □

最後に, projection ideal の概念を導入する.

**Definition 3.21.** $I$ を normal ideal over $\mathcal{P}(A)$ とする. uncountable subset $B \subseteq A$ で $\{x \subseteq A : x \cap B \neq B\} \in I^*$ となっているものに対して, **projection ideal of** $I$ **onto** $B$ を次を満たす $Y \subseteq \mathcal{P}(B)$ 全体とする: $\{x \subseteq A : x \cap B \in Y\} \in I$. $p_B(I)$ を projection of $I$ onto $B$ と表すものとする. $p_B(I)$ が normal ideal over $\mathcal{P}(B)$ となること, 及び $I$ が $\mu$-saturated ならば $p_B(I)$ も $\mu$-saturated であることはすぐにわかる.

## 4. 証明

これより Theorem 1.6 の証明に入る. 証明は大きく二つの部分に分かれる. まず, $\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set $S$ が理論上最小の濃度をもっているならば $\mathrm{Part}(S, \kappa)$ が成立することを示す. 次に $\mathcal{P}(\lambda)$ 上の normal ideal で強い saturation をもつものがあれば, そのときその ideal の measure one set で理論上最小の濃度をもつものが存在することを示す. この二つをあわせて, 定理を証明する.

**Proposition 4.1.** *$S \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$ を stationary set とする. $\kappa \in \mathrm{crit}(S)$ に対し, 次のどちらかが成立しているとする:*

*(1)* $|S| = \lambda$, または
*(2)* $\lambda$ は $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$ なる *singular cardinal* で $\forall \gamma < \lambda\,(|\{x \cap \gamma : x \in S, \gamma \in x\}| \leq \lambda)$ となっている.

このとき $\mathrm{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が成立する.

*Proof.* 必要ならば $S$ を削ることにより任意の $x \in S$ に対して $x \cap \kappa \in \kappa$ となっているとしてよい.

まず (1) を仮定する. bijection $\pi : S \to \lambda$ を一つ固定する. 各 $x \in S$ に対し, $S_x = \{y \cap x : y \in S, \pi(y) \in x, y \cap \kappa < x \cap \kappa\} (\subseteq \mathcal{P}(x))$ とおく. $T_1 = \{x \in S : S_x$ が $\mathcal{P}(x)$ で non-stationary $\}$ とする. まず $T_1$ が stationary であることを示す.

**Claim 4.2.** $T_1$ は *stationary.*

*Proof of Claim.* 任意に $f : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ を取る. $x \in T_1$ で $f``[x]^{<\omega} \subseteq x$ となるものを探したい. まず, 可算個の function $\langle f_n : n < \omega \rangle$ を $n < \omega$ に関する induction で定義する.

(1) $f_0 = f$.
(2) $f_1 : \lambda \to [\lambda]^{<\omega}$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対し,
  (a) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が $f_0$ に関して閉じていないならば, $f_1(\alpha)$ は $[\pi^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ の元 $s$ で $f_0(s) \notin \pi^{-1}(\alpha)$ となっているものとする.
  (b) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が $f_0$ に関して閉じているならば, $f_0(\alpha) = 0$ とする.
(3) $f_2 : \lambda \to \lambda$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対して,
  (a) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が $f_1$ に関して閉じていないならば, $f_1(\alpha)$ は $\pi^{-1}(\alpha)$ の元 $\beta$ で $f_1(\beta) \not\subseteq \pi^{-1}(\alpha)$ となっているものとする.
  (b) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が $f_1$ に関して閉じているならば, $f_2(\alpha) = 0$ とする.
(4) $n > 1$ に対して, $f_n$ が $\mathrm{dom}(f_n) = \lambda$ となっているように定義されているとする. このとき $f_{n+1} : \lambda \to \lambda$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対し,
  (a) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が $f_n$ に関して閉じていないならば, $f_{n+1}(\alpha)$ は $\pi^{-1}(\alpha)$ の元 $\beta$ で $f_n(\beta) \notin \pi^{-1}(\alpha)$ となっているものとする.
  (b) もし $\pi^{-1}(\alpha)$ が $f_n$ に関して閉じているならば, $f_{n+1}(\alpha) = 0$ とする.

Lemma 3.12 より, $x \in S$ で $x$ が全ての $f_n$ に関して閉じているものが存在する. $x^* \in S$ で, $x^* \cap \kappa$ がそのようなものの中で最小であるものを取る. このとき, 任意の $y \in S$ に関して, もし $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$ ならばある $n < \omega$ で $y$ は $f_n$ に関して閉じていない. この $x^* \in S$ に対して, $S_{x^*}$ が $\mathcal{P}(x^*)$ で non-stationary となっていることを示す. これより $x^* \in T_1$ かつ $f``[x^*]^{<\omega} \subseteq x^*$ となる. $y \in S$ で $\pi(y) \in x^*$ かつ $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$ となるものを取る. $n < \omega$ で $y \cap x^*$ が $f_n$ に関して閉じていないものがあることを示せば十分である. $x^*$ の取り方より, $n < \omega$ で $y$ が $f_n$ で閉じていないものがある. まず, $y$ が $f_0$ に関して閉じていないとする. $s = f_1(\pi(y))$ とおく. $f_1$ の定義より, $s \in [y]^{<\omega}$ だが $f_0(s) \notin y$ である. $\pi(y) \in x^*$ かつ $x^*$ は $f_1$ で閉じているので, $s \in [x^*]^{<\omega}$ となる. よって $s \in [y \cap x^*]^{<\omega}$ だが $f_0(s) \notin [y \cap x^*]^{<\omega}$ となる. 同様の議論で, 各 $n < \omega$ に対して, もし $y$ が $f_n$ に関して閉じていないならば $y \cap x^*$ は やはり $f_n$ に関して閉じていないことがいえる. □[Claim]

$T_1$ が stationary であることを示した. ここで $x \in T_1$ に対して, $g_x : [x]^{<\omega} \to x$ を $x$ が $T_1$ の元であることを証左する function であるとする. ここで次を示すが, それにより Part$(T_1, \kappa)$ が容易に帰結できる. よって特に Part$(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が成立する.

**Claim 4.3.** *ある $s \in [\lambda]^{<\omega}$ で $|\{\alpha < \lambda :\ \{x \in T_1 : g_x(s) = \alpha\}$ は $\mathcal{P}(\lambda)$ で stationary $\}| \geq \kappa$.*

*Proof of Claim.* そうでないとする. 各 $s \in [\lambda]^{<\omega}$ に対して, $z_s = \{\alpha < \lambda : \{x \in T_1 : g_x(s) = \alpha\}$ は stationary $\}$ とおく. 仮定より $|z_s| < \kappa$ である. 各 $\alpha \in \lambda \setminus z_s$ に対して, club $C_{s,\alpha}$ で $\{x \in T_1 : g_x(s) = \alpha\}$ と素になっているものを取る.

$T_1$ は stationary で $\forall x \in T_1\,(x \cap \kappa \in \kappa)$ なので, Lemma 3.19 より $T_1' = \{x \in T : \forall s \in [x]^{<\omega} \forall \alpha \in x \setminus z_s\,(z_s \subseteq x \wedge x \in C_{s,\alpha})\}$ が stationary となる. よって $x, y \in T_1'$ で $y \cap \kappa < x \cap \kappa$ かつ $\pi(y) \in x$ となるものが取れる. 定義より $y \cap x \in S_x$ である. このとき ある $s \in [y \cap x]^{<\omega}$ で $\alpha := g_x(s) \notin y \cap x$ となっている. $z_s \subseteq x$ なので $\alpha \notin z_s$ となる. しかし $x \in C_{s,\alpha}$ なので, これは $C_{s,\alpha}$ の取り方に矛盾する. □[Claim]

仮定 (2) の下での証明は (1) の場合とほぼ同様に行われる. まず ordinal の上昇列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\lambda) \rangle$ で $\lambda$ に収束するものを取る. 各 $x \in S$ に対して $x \cap \kappa \in \kappa$ なので, $\mathrm{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|S$ は $\kappa$-complete. よって, 全ての $x \in S$ に対して $\{\lambda_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\} \subseteq x$ となっているとしてよい. $\bar{S} = \{x \cap \lambda_i : x \in S, i < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ とおく. 仮定より $|\bar{S}| = \lambda$ である. bijection $\bar{\pi} : \bar{S} \to \lambda$ を固定する. 各 $x \in S$ に対し, $S_x = \{y \cap x : y \in S,\ y \cap \kappa < x \cap \kappa,\ \forall i < \mathrm{cf}(\lambda)\,(\bar{\pi}(y \cap \lambda_i) \in x)\}$ とする. (1) のように, $T_2 = \{x \in S : S_x \text{ is non-stationary in } \mathcal{P}(x)\}$ が stationary であることを示す.

**Claim 4.4.** *$T_2$ は stationary.*

*Proof of Claim.* $g : [\lambda]^{<\omega} \to \lambda$ を任意に取る. $x \in T_2$ で $g$ に関して閉じているものを探す. (1) のように, inductive に関数 $\langle g_n : n < \omega \rangle$ を定める.

まず $g_0 = g$ とする. $g_1 : \lambda \to [\lambda]^{<\omega}$ を次の用に定める: $\alpha < \lambda$ に対し, もし $s \in [\bar{\pi}^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ で $g_0(s) < \sup(\bar{\pi}^{-1}(\alpha))$ だが $g_0(s) \notin \bar{\pi}^{-1}(\alpha)$ となるものがあれば, $g_1(\alpha)$ をそのような $s$ とする. もしそのような $s \in [\bar{\pi}^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ がないならば, $g_1(\alpha) := 0$ とする. $n > 1$ とし, $g_n$ with the domain $\lambda$ が定義されているとする. $g_{n+1} : \lambda \to \lambda$ を次のように定義する: $\alpha < \lambda$ に対し, もし $s \in [\bar{\pi}^{-1}(\alpha)]^{<\omega}$ で $g_n(s) < \sup(\bar{\pi}^{-1}(\alpha))$ だが $g_n(s) \notin \bar{\pi}^{-1}(\alpha)$ となるものがあれば, $g_{n+1}(\alpha)$ をそのような $s$ に, そのような $s$ がないならば $g_{n+1}(\alpha) = 0$ とする.

(1) と同様, $x^* \in S$ で $x^*$ は全ての $g_n$ に関して閉じており, また $y \in S$ で $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$ かつ $y$ が 全ての $g_n$ について閉じているものが存在しないようにとる. このとき $S_{x^*}$ が $\mathcal{P}(x^*)$ で non-stationary であることを見る. $y \in S$ で $y \cap \kappa < x^* \cap \kappa$, $\forall i < \mathrm{cf}(\lambda)$ $(\bar{\pi}(y \cap \lambda_i) \in x^*)$ となるものをとる. まず $y$ が $g_0$ に関して閉じていないと仮定してみる. $s \in [y]^{<\omega}$ で $g_0(s) \notin y$ となるものが取れる. $\{\lambda_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ が $\lambda$ で unbounded であり $\{\lambda_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\} \subseteq y$ なので, $\{\sup(y \cap \lambda_i) : i < \mathrm{cf}(\lambda)\}$ はやはり unbounded である. $i < \mathrm{cf}(\lambda)$ で $g_0(s) < \sup(y \cap \lambda_i)$ となるものを固定する. このとき, $s \in [y \cap \lambda_i]^{<\omega}$, $g_0(s) < \sup(y \cap \lambda_i)$ だが $g_0(s) \notin y \cap \lambda_i$ となっている. よって, $t = f_1(\bar{\pi}^{-1}(y \cap \lambda_i)) \in [y \cap \lambda_i]^{<\omega}$ としたとき, $g_0(t) < \sup(\pi(y \cap \lambda_i))$ かつ $g_0(t) \notin \pi(y \cap \lambda_i)$ となっている. $x^*$ は $g_1$ に関して閉じているので, $t \in [x^*]^{<\omega}$ となる. ゆえに $t \in [y \cap x^*]^{<\omega}$ だが $g_0(t) \notin [y \cap x^*]^{<\omega}$ となる. 同様の議論で, 各 $n < \omega$ に対して, もし $y$ が $g_n$ について閉じていないならば $y \cap x^*$ は $g_n$ は閉じていないことが帰結できる. □[Claim]

残りは (1) と同じ議論により, $\mathrm{Part}(T_2, \kappa)$ が帰結できる. □

次に, もし $\mathcal{P}(\lambda)$ が強い saturation をもつ normal ideal をもつとき, 小さな measure one set が存在することを示す.

**Proposition 4.5.** $\lambda$ を *regular uncountable cardinal* とし, $\kappa \leq \lambda$ を *regular uncountable cardinal* とする. $I$ を *normal ideal over* $\mathcal{P}(\lambda)$ とする. もし $I$ が *$\kappa$-saturated* かつ $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ となっているならば, ある $X \in I^*$ で $\forall x, y \in X$ $(\sup(x) = \sup(y) \Rightarrow x = y)$ となっているものが存在する. 特に, $|X| = \lambda$ かつ $\{x : \sup(x) < \lambda\} \in I^*$ となっている.

*Proof.* $\{\alpha < \lambda : \mathrm{cf}(\alpha) = \omega\}$ の互いに素な stationary subset $\langle E_\xi : \xi < \lambda \rangle$ を固定する. Lemma 3.20 より, 次が成立する:

(1) $X := \{x \subseteq \lambda : x$ は $\sup(x)$ の $\sigma$-club $\} \in I^*$.
(2) $Y_\xi := \{x \subseteq \lambda : E_\xi \cap \sup(x)$ は $\sup(x)$ で stationary$\} \in I^*$ ( $\xi < \lambda$).

$f : \lambda \to \lambda$ を $f(\alpha) = \xi \iff \alpha \in E_\xi$ と定義する. もし $\alpha \notin \bigcup_{\xi < \lambda} E_\xi$ ならば, $f(\alpha) = 0$ としておく. ここで $Z = \{x \subseteq \lambda : x \in X, \forall \xi \in x\, (x \in Y_\xi), x$ は $f$ に関して閉じている $\}$ とする. $I$ の normality より, $Z \in I^*$ である.

**Claim 4.6.** 各 $x \in Z$ と $\xi < \lambda$ に対して, $\xi \in x \iff E_\xi \cap \sup(x)$ が $\sup(x)$ で *stationary*.

*Proof of Claim.* $x \in Z$ と $\xi < \lambda$ をとる. $Z$ の定義より, $\xi \in x$ ならば $E_\xi \cap \sup(x)$ は $\sup(x)$ で stationary である. 逆に, $E_\xi \cap \sup(x)$ が stationary としてみる. $x$ は $\sigma$-club なので, $x$ と $E_\xi$ は交わりを持つ. $\alpha \in x \cap E_\xi$ をとると, $\xi = f(\alpha) \in x$ である. □[Claim]

次に $\forall x, y \in Z$ $(\sup(x) = \sup(y) \Rightarrow x = y)$ をチェックする. これより題意が成立することがわかる. $\xi \in x$ に対し, $E_\xi \cap \sup(x)$ が stationary とする. $\sup(x) = \sup(y)$ なので, $E_\xi \cap \sup(y)$ も stationary である. claim より, $\xi \in y$ が得られる. 逆も同様である. □

次に, $\lambda$ が singular の場合を扱う. このケースは regular の場合に比べて証明が複雑になっている.

**Lemma 4.7.** $\lambda$ に対し, $\mathcal{P}(\lambda)$ の *club* $C$ で次を満たすものが存在する:

*(1)* 各 $x \in C$ に対して, $\sup(x \cap \mathrm{cf}(\lambda)) = \mathrm{cf}(\lambda) \iff \sup(x) = \lambda$,
*(2)* 各 $x, y \in C$ に対して, $\sup(x) = \sup(y) \iff \sup(x \cap \mathrm{cf}(\lambda)) = \sup(y \cap \mathrm{cf}(\lambda))$.

*Proof.* 十分大きい regular cardinal $\theta$ をとる．$C = \{M \cap \lambda : M \prec \langle H_\theta, \in, \lambda\rangle\}$ とすると，$C$ は club を含み，またこの $C$ が主張の性質を満たすことはすぐにわかる． □

**Proposition 4.8.** *$\lambda$ を singular cardinal で $\kappa$ を regular cardinal で $\kappa \leq \mathrm{cf}(\lambda)$ なるものをする．このとき，$\kappa$-saturated normal ideal $I$ over $\mathcal{P}(\lambda)$ で $\{x \subseteq \lambda : \sup(x) = \lambda, x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ となるものは存在しない．*

*Proof.* $I$ を $\kappa$-saturated normal ideal で $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ なるものとする．$\{x : \sup(x) = \lambda\} \in I^*$ と仮定してみる．Lemma 4.7 より，$C \in I^*$ で各 $x \in C$ に対して，$\sup(x \cap \mathrm{cf}(\lambda)) = \mathrm{cf}(\lambda) \iff \sup(x) = \lambda$ となるものがある．よって $S' := \{x \in S : \sup(x \cap \mathrm{cf}(\lambda)) = \mathrm{cf}(\lambda)\} \in I^*$．また，$\mathrm{cf}(\lambda) \geq \kappa$ より $x \in S'$ に対して $x \cap \mathrm{cf}(\lambda) \neq \mathrm{cf}(\lambda)$ である．ここで projection ideal $J$ of $I$ onto $\mathrm{cf}(\lambda)$ を考える．$J$ は $\kappa$-saturated normal ideal over $\mathcal{P}(\mathrm{cf}(\lambda))$，$\{y \subseteq \mathrm{cf}(\lambda) : y \cap \kappa \in \kappa\} \in J^*$，かつ $\{y \subseteq \mathrm{cf}(\lambda) : \sup(y) = \mathrm{cf}(\lambda)\} \in J^*$ となっている．しかしこれは Proposition 4.5 に反している． □

**Proposition 4.9.** *$\lambda$ を singular cardinal で $\kappa < \lambda$ を regular uncountable cardinal とする．$I$ を normal ideal over $\mathcal{P}(\lambda)$ で $\{x : x \cap \kappa \in \kappa\} \in I^*$ なるものとする．もし $I$ が $\kappa$-saturated で $\kappa \leq \mathrm{cf}(\lambda)$ ならば，$X \in I^*$ で $|X| = \lambda$ となるものが存在する．*

この proposition を証明するために，Shelah による **pcf theory** を用いる．まず pcf theory の基本的な定義及び事実を列挙する．pcf についてのより詳しい情報は，Abrahum-Magidor [1], Cummings [3], Cummings-Foreman-Magidor [4], Eisworth [5], Shelah [11] 等を参照せよ．

$D$ を regular cardinal の集合とする．$\Pi D = \{f : f$ は $D$ 上の function, $\forall \mu \in D\,(f(\mu) \in \mu)\}$ とする．$D$ 上の proper ideal $I$ に対して，$\Pi D$ 上の二項関係 $<_I$ と $\leq_I$ を次のように定義する：

- $f <_I g \iff \{\mu \in D : f(\mu) \geq g(\mu)\} \in I.$
- $f \leq_I g \iff \{\mu \in D : f(\mu) > g(\mu)\} \in I.$

関係 $<_I$ と $\leq_I$ は $\Pi D$ 上の partial order である．また，$<=<_\emptyset$ とする：すなわち $f < g \iff \forall \mu \in D\,(f(\mu) < g(\mu))$．もし $\Pi_D$ 上に $<_I$-increasing, $<_I$-cofinal な列が存在するとき，$\Pi D/I$ は **true cofinality** をもつと呼ぶことにする．$\Pi D/I$ が true cofinality をもつとき，$\mathrm{tcf}(\Pi D/I)$ で $\Pi D$ の $<_I$-increasing $<_I$-cofinal subset の最小濃度を表すことにする．もし $I$ が maximal ideal の時は，$<_I$ は total order となり，$\Pi D/I$ は常に true cofinality をもつことに注意する．

$D$ と $I$ を先のようなものとする．$\gamma$ を ordinal で $\langle f_\xi : \xi < \gamma\rangle$ を $\Pi D$ の $\leq_I$-increasing な列とする．$g \in \Pi D$ が **exact upper bound for** $\langle f_\xi : \xi < \gamma\rangle$ (略して **eub**) とは，

(1) 全ての $\xi < \gamma$ に対して $f_\xi \leq_I g$.

(2) 全ての $h \in \Pi D$ に対して，もし $h <_I g$ ならばある $\xi < \gamma$ で $h \leq_I f_\xi$ となる．

eub for $\langle f_\xi : \xi < \gamma\rangle$ は modulo $I$ の意味で一意に決まることに注意する：もし $g$ と $g'$ が eub for $\langle f_\xi : \xi < \gamma\rangle$ ならば．$\{\mu \in D : g(\mu) = g'(\mu)\} \in I^*$.

regular cardinal の集合 $D$ と集合 $x$ に対して，characteristic function $\chi^D_x \in \Pi D$ を，もし $\sup(x \cap \mu) < \mu$ ならば $\chi^D_x(\mu) = \sup(x \cap \mu)$，もし $\sup(x \cap \mu) = \mu$ ならば $\chi^D_x(\mu) = 0$ と定義する．

regular cardinal の集合 $D$ で，$D$ が最大元を持たないものに対して，$J^{bd}_D$ で bounded ideal over $D$ をあらわす：すなわち，$J^{bd}_D := \{X \subseteq D : \sup(X) < \sup(D)\}$.

singular cardinal $\mu$ に対して，

$$\mathrm{pp}(\mu)=\sup\{\mathrm{tcf}(\Pi D/I) : D\subseteq \mu\cap\mathrm{Reg},\ |D|=\mathrm{cf}(\mu),\ \sup(D)=\mu,\ I \text{ は } J^{bd}_D \text{ の拡張である maximal ideal over } D\}.$$

**Fact 4.10.** *Singular cardinal* $\mu$ に対して, $\mu^+\le \mathrm{pp}(\mu)\le \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$.

**Fact 4.11** (Shelah [11]). *uncountable cofinality を持つ singular cardinal* $\mu$ に対して, もし $\{\alpha<\mu : \alpha$ は *singular cardinal,* $\mathrm{pp}(\alpha)=\alpha^+\}$ が $\mu$ で *stationary* ならば $\mathrm{pp}(\mu)=\mu^+$.

これより Proposition 4.9 の証明に入る.

*Proof.* 各 regular $\mu<\lambda$ に対して, $I_\mu$ を projection of $I$ onto $\mu$ とする. $I_\mu$ は $\kappa$-saturated normal ideal over $\mathcal{P}(\mu)$ で $\{x : x\cap\kappa\in\kappa\}\in I^*_\mu$. Proposition 4.5 より, $X_\mu\in I^*_\mu$ で $\forall x,y\in X_\mu\,(\sup(x)=\sup(y)\Rightarrow x=y)$ かつ $\forall x\in X_\mu\,(\sup(x)<\mu)$ となるものが取れる. ここで $X=\{x\subseteq\lambda : \sup(x)<\lambda, \forall\mu\in\mathrm{Reg}\cap x\setminus\kappa\,(x\cap\mu\in X_\mu)\}$ とする. Proposition 4.8 と $I$ の normality より, $X\in I^*$ である. $X$ の定義より各 $x,y\in X$ と $\mu\in\mathrm{Reg}\cap x\cap y$ に対して, $\sup(x\cap\mu)=\sup(y\cap\mu)\Rightarrow x\cap\mu=y\cap\mu$ が成立することに注意.

**Claim 4.12.** 各 *singular cardinal* $\nu$ で $\kappa<\nu<\lambda$ なるものに対して, $\mathrm{pp}(\nu)=\nu^+$.

*Proof.* Fact 4.11 より, countable cofinality を持つ $\nu$ のみ調べればよい. projection ideal $I_{\nu^+}$ of $I$ onto $\nu^+$ を考える. $I_{\nu^+}$ は $\kappa$-saturated で $\{x : x\cap\kappa\in\kappa\}\in I^*_{\nu^+}$. よって $S\in I^*_{\nu^+}$ ですべての $x,y\in S$ に対して,

- $\sup(x)=\sup(y)\Rightarrow x=y$.
- すべての regular $\mu\in(x\cap y)\cup\{\nu^+\}$ に対して $\sup(x\cap\mu),\sup(y\cap\mu)<\mu$ .

特に $|S|=\nu^+$ である. $\mathrm{pp}(\nu)=\nu^+$ を示すために, $D\subseteq\nu\cap\mathrm{Reg}$ で $|D|=\omega$ かつ $\sup(D)=\nu$ となるものと maximal ideal $K$ over $D$ で $J^{bd}_D\subseteq K$ となるものを任意に取る. $F\subseteq\Pi D$ で $|F|=\nu^+$ かつ $F$ が cofinal in $\langle\Pi D,<_K\rangle$ となるものを見つけたい. しかし $\{\chi^D_x : x\in S\}$ が cofinal で濃度 $\nu^+$ となることはすぐにわかる. □[Claim]

unbounded subset $D\subseteq\lambda\cap\mathrm{Reg}$ で $|D|=\mathrm{cf}(\lambda)$, $\sup(D)=\lambda$, かつ $\min(D)>\mathrm{cf}(\lambda)$ となるものを固定する. $\mathcal{M}=\langle H_\theta,\in,\Delta,\lambda,D\rangle$ とする. $Y=\{x\in X : SK^{\mathcal{M}}(x)\cap\lambda=x\}$ とすると, 明らかに $Y\in I^*$ である.

**Claim 4.13.** 各 $x,y\in Y$ に対して, もし $\sup(x)=\sup(y)$ ならば $x\cap D=y\cap D$ である.

*Proof of Claim.* $\Delta$-least increasing bijection map $\pi:\mathrm{cf}(\lambda)\to D$ をとる. $x\in Y$ に対して, $\mathrm{cf}(\lambda)\in x$ かつ $\pi``(x\cap\mathrm{cf}(\lambda))=x\cap D$ となる. $x,y\in Y$ で $\sup(x)=\sup(y)$ なるものを任意に取ると, $\sup(x\cap\mathrm{cf}(\lambda))=\sup(y\cap\mathrm{cf}(\lambda))$ である. $X$ の定義より $x\cap\mathrm{cf}(\lambda)=y\cap\mathrm{cf}(\lambda)$ が成立する. ゆえに $x\cap D=\pi``(x\cap\mathrm{cf}(\lambda))=\pi``(y\cap\mathrm{cf}(\lambda))=y\cap D$ である. □[claim]

$E=\{\sup(x) : x\in Y\}$ とする. 次に注意:

(1) $E$ は $\lambda$ 未満の singular cardinal の集合である.
(2) $E$ は $\lambda$ で unbounded かつ $|E|=\mathrm{cf}(\lambda)$ である.

直前の claim より, 各 $\nu\in E$ に対して一意な $D_\nu\subseteq D\cap\nu$ で $\forall x\in Y\,(\sup(x)=\nu\Rightarrow x\cap D=D_\nu)$ となるものが取れる. $D_\nu$ は $\nu$ で unbounded であることに注意.

Claim 4.12 より, すべての $\nu\in E$ に対して $\mathrm{pp}(\nu)=\nu^+$ である. よって maximal ideal $K_\nu$ over $D_\nu$ で $J^{bd}_{D_\nu}$ を拡張し, $\mathrm{tcf}(\Pi D_\nu/K_\nu)=\nu^+$ となるものが取れる: bounded set $d\subseteq D_\nu$ で $|d|=\mathrm{cf}(\nu)$ を固定し, $J^{bd}_{D_\nu}$ を拡張する maximal ideal $K_\nu$ で $d\in K^*_\nu$ となるものを取ればよい.

$\Pi D_\nu$ の $<_{K_\nu}$-increasing $<_{K_\nu}$-cofinal な列 $\langle f^\nu_\xi : \xi < \nu^+\rangle$ をとる. $x \in Y$ を取り, $\nu = \sup(x)$ とする. ここで $e_x \leq \nu^+$ を $e_x = \sup\{\xi < \nu^+ : f^\nu_\xi <_{K_\nu} \chi^{D_\nu}_x\}$ と定義する. すべての $\mu \in D_\nu$ に対して $\sup(x \cap \mu) < \mu$ なので, $e_x < \nu^+$ である.

さらに $Z = \{x \in Y : \chi^{D_{\sup(x)}}_x$ は eub for $\langle f^{\sup(x)}_\xi : \xi < e_x\rangle\}$ とおく.

**Claim 4.14.** $Z \in I^*$.

*Proof.* 矛盾を出すために $W := Y \setminus Z \in I^+$ と仮定する. $x \in W$ をとり, $\nu = \sup(x)$ とする. このとき, $\chi^{D_\nu}_x$ は eub for $\langle f^\nu_\xi : \xi < e_x\rangle$ ではない. よって $g_x \in \Pi D_\nu$ で $g_x < \chi^{D_\nu}_x$ だがすべての $\xi < e_x$ に対して $g_x \not<_{K_\nu} f^\nu_\xi$ となるものが存在する.

$j$ を $(V, \mathbb{P}_I)$-genaric により生成される generic elementary embedding の $\mathbb{P}_I$-name とする. ここで $W \Vdash$"$D_{\sup(j``\lambda)} = j``D$, $\forall j(\mu) \in D_{\sup(j``\lambda)}\, (g_{j``\lambda}(j(\mu)) < \sup(j``\lambda \cap j(\mu)) = \sup(j``\mu))$" となることに注意する. $\mathbb{P}_I$ の $\kappa$-c.c. ness より, $\langle \alpha_\mu : \mu \in D\rangle$ で $\alpha_\mu < \mu$ かつ $W \Vdash$"$g_{j``\lambda}(j(\mu)) \leq j(\alpha_\mu)$" となるものが取れる. $g \in \Pi D$ を すべての $\mu \in D$ に対して $g(\mu) = \alpha_\mu$ と定義する. 明らかに $W \Vdash$"$g_{j``\lambda} < j(g)|D_{\sup(j``\lambda)}$" が成立する. よって $W' := \{x \in W : g_x < g|D_{\sup(x)}\} \in I^+$ となる. $E' = \{\sup(x) : x \in W'\} \subseteq E$ とおく. 各 $\nu \in E'$ に対して, $\eta_\nu < \nu^+$ で $g|D_\nu <_{K_\nu} f_{\eta_\nu}$ となるものを選ぶ. さらに 各 $\mu \in D$ に対して $\beta_\mu = \sup\{f_{\eta_\nu}(\mu) + 1 : \mu \in D_\nu, \nu \in E'\}$ とする. $|E'| = \mathrm{cf}(\lambda) < \min(D)$ なので, $\beta_\mu < \mu$ である. 最後に $h \in \Pi D$ を $h(\mu) = \beta_\mu$ と定義する. 明らかに $\nu \in E'$ に対して $f_{\eta_\nu} <_{K_\nu} h|D_\nu$ となる.

$W' \in I^+$ で $I$ は normal なので, $x \in W'$ で $\forall \mu \in x \cap D\, (\beta_\mu \in x)$ となるものが取れる. この時, $\nu := \sup(x)$ とおけば $h|D_\nu < \chi^{D_\nu}_x$ となる. ゆえに $g_x < g|D_\nu <_{K_\nu} f_{\eta_\nu} <_{K_\nu} h|D_\nu < \chi^{D_\nu}_x$ となる. 以上より $g_x <_{K_\nu} f_{\eta_\nu}$ だが $\eta_\nu < e_x$ であり, これは $g_x$ のとり方に矛盾する. □[claim]

最後に次を示す. これより明らかに $|Z| \leq \lambda$ となる.

**Claim 4.15.** 各 $x, y \in Z$ で $\sup(x) = \sup(y)$ なるものに対して, もし $e_x = e_y$ ならば $x = y$ である.

*Proof of Claim.* $x, y \in Z$ で $\sup(x) = \sup(y)$ かつ $e_x = e_y$ なるものをとる. $\nu = \sup(x) = \sup(y)$ で $\eta = e_x = e_y$ とおく. このとき $D_\nu$ は $x \cap y$ の unbounded subset である. 定義より, $\chi^{D_\nu}_x$ と $\chi^{D_\nu}_y$ は eub for $\langle f^\nu_\xi : \xi < \eta\rangle$ となる. eub は modulo $K_\nu$ で一意なので, $\{\mu \in D_\nu : \sup(x \cap \mu) = \sup(y \cap \mu)\}$ は $\nu$ で unbounded となる. $\mu \in D_\nu$ で $\sup(x \cap \mu) = \sup(y \cap \mu)$ なるものに対して, $\mu \in D_\nu \subseteq x \cap y$ となる. よって $X$ の定義より, $x \cap \mu = y \cap \mu$ が成立する. このような $\mu$ は $\nu$ で unbounded に存在するので, $x = y$ となる. □[Claim]

□

以上より, 次のような結論が得られる.

**Corollary 4.16.** *$\lambda$ を uncountable cardinal で $S$ を $\mathcal{P}(\lambda)$ の stationary set とする. このとき各 $\kappa \in \mathrm{crit}(S)$ に対して, $\mathrm{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が成立する. 特に $\mathrm{Part}(S, \kappa)$ が成立する.*

*Proof.* そうでないと仮定する. $\mathrm{Part}(\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}, \kappa)$ が不成立なので, ideal $I := \mathrm{NS}_{\mathcal{P}(\lambda)}|\{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ は $\kappa$-saturated となる.

**Case 1.** $\mathrm{cf}(\lambda) < \kappa$. regular cardinal の上昇列 $\langle \lambda_i : i < \mathrm{cf}(\lambda)\rangle$ で $\lambda$ に収束し, $\kappa < \lambda_0$ となるものをとる. $J_i$ を projection of $I$ onto $\lambda_i$ とする. $J_i$ は $\kappa$-saturated で $\{y \subseteq \lambda_i :$

$y \cap \kappa \in \kappa\} \in J_i^*$. よって Lemma 3.20 より, $X_i \in J_i^*$ で $|X_i| = \lambda_i$ となるものが取れる. $S' = \{x \in S : \forall i < \mathrm{cf}(\lambda)\,(x \cap \lambda_i) \in X_i\} \in I^*$ とする. $S'$ は $S$ の stationary subset で, すべての $\gamma < \lambda$ に対して $|\{x \cap \gamma : \gamma \in x, x \in S'\}| < \lambda$ となる. これは Proposition 4.1 に反する.

**Case 2.** $\kappa \leq \mathrm{cf}(\lambda)$. Proposition 4.5 と Proposition 4.9 より, stationary subset $T \subseteq \{x \in S : x \cap \kappa \in \kappa\}$ で $|T| = \lambda$ となるものが取れる. このとき Proposition 4.1 より $\mathrm{Part}(T, \kappa)$ が成立し, やはり矛盾である. □

**Corollary 4.17.** *任意の非可算集合 $A$ と $\mathcal{P}(A)$ の stationary set $S$ に対して $\mathrm{Part}(S, \omega_1)$ が成立する.*

## 5. 問題

我々は stationary set $S$ と $\kappa \in \mathrm{crit}(S)$ に対して $\mathrm{Part}(S, \kappa)$ が成立することを示した. 一方で $\lambda > \kappa$ であっても $\kappa^+$ 個の分割は一般に帰結できない: Gitik [7] は適当な巨大基数公理の仮定の下で, ある inaccessible $\kappa$ と stationary $S \subseteq \{x \subseteq \kappa^+ : x \cap \kappa \in \kappa, |x| < \kappa\}$ で $\mathrm{Part}(S, \kappa^+)$ が成立しない model を作っている. これより次のような自然な疑問が生じる:

**Question 1.** ある $\kappa < \lambda$ と stationary $S \subseteq \{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa, |x| \geq \kappa\}$ で $\mathrm{Part}(S, \kappa^+)$ が成立しないことは consisntent か? 特に $\kappa = \omega_1$ と $\lambda = \omega_2$ の場合はどうであろうか?

ここで次に注意しておく:

**Fact 5.1.** *$\kappa < \lambda$ に対して次は同値である:*

*(1)* $\{x \subseteq \lambda : x \cap \kappa \in \kappa, |x| \geq \kappa\}$ *が* $\mathcal{P}(\lambda)$ *で stationary.*
*(2)* $\langle \lambda, \kappa \rangle \twoheadrightarrow \langle \kappa, < \kappa \rangle$.

特に $\{x \subseteq \omega_2 : x \cap \omega_1 \in \omega_1, |x| = \omega_1\}$ が *stationary* であることと *Chang's conjecture* は同値である.

## References


[1] U. Abrahum, M. Magidor, *Cardinal Arithmetic*. To appear in Handbook of Set Theory.
[2] D. Burke, *Splitting stationary subsets of $\mathcal{P}(\chi)$*. unpublished.
[3] J. Cummings, *Notes on singular cardinal combinatorics*. Notre Dame J. Formal Logic 46 (2005), no. 3, 251–282.
[4] J. Cummings, M. Foreman, M. Magidor, *Squares, scales and stationary reflection*. J. Math. Log. 1 (2001), no. 1, 35–98.
[5] T. Eisworth, *Successors of singular cardinals*. To appear in Handbook of Set Theory.
[6] M. Foreman, *Potent axioms*. Trans. Amer. Math. Soc. 294 (1986), no. 1, 1–28.
[7] M. Gitik, *Nonsplitting subset of $P_\kappa(\kappa^+)$*, J. Symbolic Logic 50 (1985), no. 4, 881–894 (1986).
[8] T. Jech, *Some combinatorial problems concerning uncountable cardinals*, Ann. Math. Logic 5 (1973), 165–198.
[9] A. Kanamori, *The higher infinite*. Large cardinals in set theory from their beginnings. Perspectives in Mathematical Logic. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
[10] P. Larson, *The stationary tower. Notes on a course by W. Hugh Woodin*. University Lecture Series, 32. American Mathematical Society.
[11] S. Shelah, *Cardinal arithmetic*. Oxford Logic Guides, 29. Oxford Science Publications. 1994.
[12] R. Solovay, *Strongly compact cardinals and the GCH*. Proceedings of the Tarski Symposium (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXV, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), pp. 365–372.

*E-mail address*: usuba@info.human.nagoya-u.ac.jp

Graduate School of Information Science, Nagoya University, Nagoya, 464-8601, Japan